CAPíTULO 15

Funções de Legendre

15.1. A EDO de Legendre

Outra EDO que aparece frequentemente na resolução de EDPs em problemas físicos (por exemplo, ao resolver a equação de Laplace em coordenadas esféricas) é a *EDO de Legendre*

$$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+p\left(p+1\right)y=0$$

onde $y\left(x\right)$ é uma função cujo domínio se restringe ao intervalo $x\in\left(-1,1\right)$ e p é um número real.

Como $x=0$ é um ponto ordinário desta EDO, desta vez basta procurar soluções em série do tipo

$$y\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

Substituindo esta expressão na EDO de Legendre, vem

$$a_{n+2}=-\frac{\left(p-n\right)\left(p+n+1\right)}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}a_n$$

com a_0 e a_1 arbitrários. Em outras palavras

$$y\left(x\right)=a_0\left(1-\frac{p\left(p+1\right)}{2!}x^2+\frac{p\left(p-2\right)\left(p+1\right)\left(p+3\right)}{4!}x^4-\frac{p\left(p-2\right)\left(p-4\right)\left(p+1\right)\left(p+3\right)\left(p+5\right)}{6!}x^6+...\right)+$$
$$+a_1\left(x-\frac{\left(p-1\right)\left(p+3\right)}{3!}x^3+\frac{\left(p-1\right)\left(p-3\right)\left(p+3\right)\left(p+5\right)}{5!}x^5-\frac{\left(p-1\right)\left(p-3\right)\left(p-5\right)\left(p+3\right)\left(p+5\right)\left(p+7\right)}{7!}x^7+...\right)$$

No caso em que p é inteiro, note que $a_{p+2}=0$, e portanto também se anulam os coeficientes a_{p+4}, a_{p+6}, etc. Em outras palavras, se p é par a série de potências que multiplica a_0 é um polinômio (finito!) de grau p; se p é ímpar, a série de potências que multiplica a_1 será um polinômio de grau p. Para escrever este polinômio de forma compacta, basta completar os fatoriais; por exemplo, no caso em que p é par (digamos, $p=2m$), os seguintes produtos aparecem no termo em x^{2k}:

$$\begin{aligned}p\left(p-2\right)\left(p-4\right)...\left(p-2k+2\right) &= 2m\left(2m-2\right)\left(2m-4\right)...\left(2m-2k+2\right)=2^k\frac{m!}{\left(m-k\right)!}\\ \left(p+1\right)\left(p+3\right)...\left(p+2k-1\right) &= \frac{\left(p+2k\right)!}{p!\left(p+2\right)\left(p+4\right)...\left(p+2k\right)}=\frac{\left(p+2k\right)!}{p!2^k\left(m+1\right)\left(m+2\right)...\left(m+k\right)}=\frac{1}{2^k}\frac{\left(p+2k\right)!m!}{p!\left(m+k\right)!}\end{aligned}$$

e, portanto, o polinômio que acompanha a_0 é

$$\sum_{i=0}^{m}\frac{\left(-1\right)^i\left(m!\right)^2\left(p+2i\right)!}{\left(m-i\right)!p!\left(m+i\right)!\left(2i\right)!}x^{2i}=\frac{\left(m!\right)^2}{p!}\sum_{i=0}^{m}\frac{\left(-1\right)^i\left(p+2i\right)!}{\left(m-i\right)!\left(m+i\right)!\left(2i\right)!}x^{2i}$$

A constante à esquerda pode ser incorporada a a_0; tomando $i=m-k$ ficamos com o polinômio

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{\left(-1\right)^{m-k}\left(2p-2k\right)!}{k!\left(p-k\right)!\left(p-2k\right)!}x^{p-2k}$$

Enfim, no caso em que p é ímpar, tomamos $p=2m+1$ e chegamos a esta mesma expressão! Isto nos inspira a definir:

Definição 116. *Seja $m=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$, isto é, $n=2m$ ou $n=2m+1$ dependendo do caso em que n é par ou ímpar. Definimos o* polinômio de Legendre de grau n *pela fórmula*

$$P_n\left(x\right)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{m}\frac{\left(-1\right)^k\left(2n-2k\right)!}{k!\left(n-k\right)!\left(n-2k\right)!}x^{n-2k}$$

Ainda no caso em que $p = n$ é inteiro, a solução $y(x)$ encontrada acima será a combinação linear do polinômio $P_n(x)$ (a série finita) com uma segunda série (a infinita!). Esta segunda série, normalizada corretamente, é costumeiramente denotada por $Q_n(x)$, e denominada *função de Legendre de segunda espécie e ordem n*. Das funções $Q_n(x)$, citaremos aqui apenas que

$$\lim_{x\to 1^-} Q_n(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x\to -1^+} Q_n(x) = (-1)^{n+1}\infty$$

ou seja, $Q_n(x)$ não é limitada no intervalo $[-1,1]$.

Enfim, se p não é inteiro, pode-se mostrar que a expressão $y(x)$ acima é ilimitada próxima de $x = \pm 1$ (exceto, é claro, se $a_0 = a_1 = 0$). Em suma:

PROPOSIÇÃO 117. *Para n inteiro não-negativo, a solução geral da EDO de Legendre*

$$\left(1-x^2\right)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

é

$$y(x) = c_1 P_n(x) + c_2 Q_n(x)$$

onde a função $P_n(x)$ é um polinômio de Legendre de ordem n *e $Q_n(x)$ é uma* função de Legendre de segunda espécie e ordem n. *Se a solução tiver que ser limitada em $[-1,1]$, então*

$$y(x) = c_1 P_n(x).$$

Se n não é inteiro, a única solução limitada da EDO de Legendre é a identicamente nula.

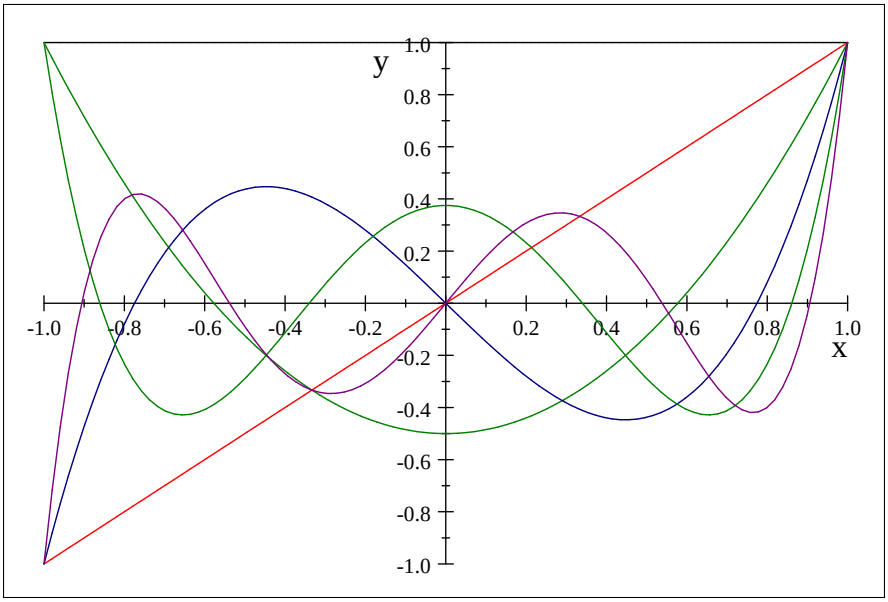
15.2. Propriedades dos Polinômios de Legendre

Para desmistificar o somatório que define $P_n(x)$, vamos explicitar os primeiros polinômios:

EXEMPLO 118. *Os primeiros polinômios de Legendre são*

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1\\
P_1(x) &= x\\
P_2(x) &= \frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)\\
P_3(x) &= \frac{1}{4}\left(10x^3-6x\right)\\
P_4(x) &= \frac{1}{8}\left(35x^4-30x^2+3\right)\\
P_5(x) &= \frac{1}{16}\left(126x^5-140x^3+30x\right)
\end{aligned}$$

cujos gráficos são:



Note que a constante $\frac{1}{2^n}$ foi escolhida de forma a que todos eles satisfaçam a condição $P_n(1) = 1$. É fácil também ver que $P_n(x)$ é par se n é par e $P_n(x)$ é ímpar se n é ímpar.

Os polinômios de Legendre têm as seguintes propriedades:

PROPOSIÇÃO 119 (Fórmula de Rodrigues).

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(\left(x^2-1\right)^n\right)$$

DEMONSTRAÇÃO. Basta abrir $\left(x^2-1\right)^n$ em binômio de Newton

$$\left(x^2-1\right)^n = \sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i n!}{(n-i)!i!}x^{2i} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k} n!}{k!(n-k)!}x^{2n-2k}$$

Derivando esta fórmula n vezes e dividindo por $2^n n!$, chega-se à expressão do polinômio de Legendre. □

Há relações de recorrência entre os polinômios de Legendre que são parecidas com as relações entre as funções de Bessel:

PROPOSIÇÃO 120. *Valem as seguintes relações*

$$\begin{aligned}(2n+1)\,xP_n(x) &= (n+1)\,P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x) \qquad n = 1,2,3,...\\ \left(x^2-1\right)P_n'(x) &= nxP_n(x) - nP_{n-1}(x) \qquad n = 1,2,3,...\end{aligned}$$

Note que, sabendo que $P_0(x) = 1$ e $P_1(x) = x$, a primeira recorrência acima pode ser usada para definir e calcular todos os polinômios $P_n(x)$.

Enfim, para calcular integrais que incluam $P_n(x)$, a seguinte relação pode ser útil:

PROPOSIÇÃO 121. *Temos*

$$\int P_n(x)\,dx = \frac{P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)}{2n+1} + C \qquad n = 1,2,3,...$$

15.3. Séries de Fourier-Legendre

Desta vez, temos a seguinte relação de ortogonalidade (vide exercícios):

PROPOSIÇÃO 122.

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx = \begin{cases} 0, \text{ se } m \neq n \\ \frac{2}{2n+1}, \text{ se } m = n \end{cases}$$

Isto significa que, usando o produto interno $\langle f(x), g(x)\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\,g(x)\,dx$, os polinômios de Legendre são ortogonais. Isto inspira a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 123. *Seja $f(x)$ uma função com domínio $[-1,1]$. Sua* série de Fourier-Legendre *é*

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$$

onde

$$c_n = \frac{\langle f, P_n\rangle}{\langle P_n, P_n\rangle} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1} f(x)\,P_n(x)\,dx$$

Enfim, o teorema de convergência para as séries de Fourier-Legendre é praticamente idêntico aos das séries de Fourier e Fourier-Bessel:

TEOREMA 124. *Seja $f(x)$ uma função seccionalmente suave com domínio $[-1,1]$. Então, se $-1 < x < 1$,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

onde o lado esquerdo é a série de Fourier-Legendre de $f(x)$. Mais ainda, se $f(x)$ é C^1, então a convergência é uniforme em qualquer intervalo fechado contido em $(-1,1)$.

EXEMPLO 125. *Encontremos a série de Fourier-Legendre da função $f(x) = x^2$. Um jeito instrutivo (mas muito* ***ruim*** *neste caso, como veremos a seguir) seria calcular*

$$c_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 P_n(x)\,dx$$

Dá para acelerar um pouco as contas observando que, se n é ímpar, a função dentro da integral será ímpar, e portanto $c_{2k+1} = 0$. Quando o índice é par e positivo, vem

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 P_n(x)\,dx = \\ &= \frac{2n+1}{2}\left(\left(x^2\frac{P_{n+1}(x)-P_{n-1}(x)}{2n+1}\right)_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 2x\frac{P_{n+1}(x)-P_{n-1}(x)}{2n+1}dx\right) \end{aligned}$$

O primeiro termo se anula pois $P_{n+1}(x) = P_{n-1}(x)$ em $x = \pm 1$. Note que devemos fazer o caso $n = 0$ à parte (pois não existe P_{-1}!):

$$c_0 = \frac{2\cdot 0+1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{1}{3}$$

Agora continuemos com o caso $n > 0$. Para acelerar a integral da direita, note que $x = P_1(x)$ – ou seja

$$c_n = -\langle P_1, P_{n+1}\rangle + \langle P_1, P_{n-1}\rangle$$

como os polinômios de Legendre são ortogonais, isto vai dar sempre 0... a menos que $n = 0$ (já fizemos) ou $n = 2$, quando teríamos

$$c_2 = \langle P_1, P_1\rangle = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}$$

Em suma, descobrimos que

$$x^2 \sim \frac{1}{3}P_0(x) + \frac{2}{3}P_2(x)$$

Por que esse jeito é ruim? Porque, neste caso, $f(x)$ é um polinômio de grau 2! Como P_0, P_1 e P_2 são polinômios linearmente independentes, eles são uma base do espaço dos polinômios de grau até 2, então a gente já sabia desde o começo que bastava usar esses três polinômios na série! Sabendo disso, podemos evitar as integrais escrevendo a identidade

$$x^2 = c_0P_0(x) + c_1P_1(x) + c_2P_2(x) = c_0 + c_1x + c_2\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)$$

e encontrando diretamente os coeficientes (esta identidade vai valer para $x \in \mathbb{R}$, diga-se de passagem, não apenas em $(-1,1)$). Aliás, como x^2 é par, já sabemos que $c_1 = 0$ (ou note que é o único termo de grau 1). Agora é só comparar os termos em x^2 e independente do polinômio:

$$\begin{aligned} \textit{Termo em } x^2 \quad &: \quad 1 = \frac{3c_2}{2} \Rightarrow c_2 = \frac{2}{3} \\ \textit{Termo independente} \quad &: \quad 0 = c_0 - \frac{c_2}{2} \Rightarrow c_0 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Então, novamente

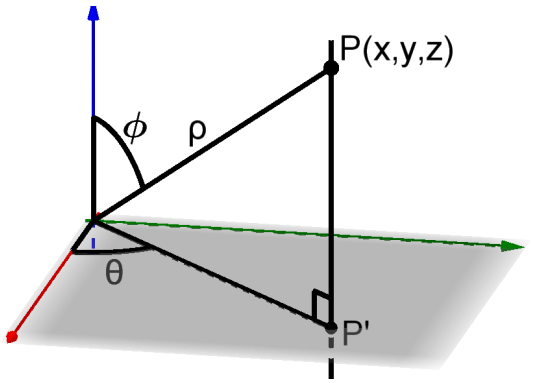
$$x^2 = \frac{1}{3}P_0 + \frac{2}{3}P_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)\right)$$

15.4. Problemas em Coordenadas Esféricas

As séries de Fourier-Legendre serão úteis para resolver alguns problemas clássicos em coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ), aqui definidas por[1]

$$\begin{aligned} x &= \rho\sin\phi\cos\theta \\ y &= \rho\sin\phi\sin\theta \\ z &= \rho\cos\phi \end{aligned}$$

[1] Esta é a notação mais usual entre matemáticos. Muitas áreas (especialmente a física) colocam ϕ no lugar de θ e vice-versa, e usam r ao invés de ρ. Fique atento!



EXEMPLO 126. *Se $u(x,y,z)$ é o estado estacionário da temperatura u de um sólido S, ela deve satisfazer*

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \text{ se } (x,y,z) \in S$$

Suponha que S é um sólido bem representado em coordenadas esféricas contendo a origem Para encontrar soluções separadas $u(\rho,\theta,\phi)$, devemos utilizar a expressão do Laplaciano em coordenadas esféricas e escrever

$$u_{\rho\rho} + \frac{2}{\rho}u_\rho + \frac{1}{\rho^2\sin^2\phi}u_{\theta\theta} + \frac{1}{\rho^2}u_{\phi\phi} + \frac{\cot\phi}{\rho^2}u_\phi = 0 \text{ em } S.$$

Procuremos soluções que apresentem simetria circular (azimutal), isto é, que não dependam de θ. Estas soluções $u(\rho,\phi) = R(\rho)F(\phi)$ satisfazem

$$\rho^2 u_{\rho\rho} + 2\rho u_\rho + u_{\phi\phi} + (\cot\phi)u_\phi = 0$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{\rho^2R''}{R} + \frac{2\rho R'}{R} + \frac{F''}{F} + \cot\phi\frac{F'}{F} &= 0 \Rightarrow \frac{\rho^2R''}{R} + \frac{2\rho R'}{R} = -\frac{F''}{F} - \cot\phi\frac{F'}{F} = k_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} \rho^2R'' + 2\rho R' - k_1R = 0 \\ F'' + (\cot\phi)F' + k_1F = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

A EDO em R é uma EDO de Cauchy-Euler, cuja equação auxiliar é

$$m(m-1) + 2m - k_1 = 0$$

Se $\Delta = 1 + 4k_1 \leq 0$, a solução terá termos do tipo $\rho^{-1/2}$ o que é indesejável pois $\rho = 0$ faz parte do domínio do problema. Assim, a quadrática acima necessariamente terá duas raízes reais distintas, ambas satisfazendo

$$m(m+1) = k_1$$

Antes de terminar a EDO emρ, voltemos nossa atenção para a equação em ϕ. Fazendo a mudança de variáveis $Y(x) = F(\phi)$ com $x = \cos\phi$, vem

$$\begin{aligned} F'(\phi) &= -Y'(x)\sin\phi \\ F''(\phi) &= Y''(x)\sin^2\phi - Y'(x)\cos\phi \end{aligned}$$

ou seja

$$\sin^2\phi Y'' - 2\cos\phi Y' + k_1Y = 0 \Rightarrow (1-x^2)Y'' - 2xY' + m(m+1)Y = 0$$

que é exatamente a equação de Legendre! Para termos soluções limitadas para $x \in (-1,1)$, m tem que ser inteiro (digamos, $m = n \in \{0,1,2,...\}$), e as soluções vêm dos polinômios de Legendre

$$Y(x) = a_nP_n(x) \Rightarrow F(\phi) = a_nP_n(\cos\phi)$$

Sabendo agora que $k_1 = n(n+1)$ com $n = 0,1,2,...$ voltamos à EDO em R, cuja solução geral será

$$R(\rho) = \alpha\rho^n + \beta\rho^{-n-1}$$

Em particular, se desejarmos soluções separadas limitadas próximo de $\rho = 0$, descartamos a potência negativa, e ficamos apenas com soluções do tipo

$$u_n(\rho,\theta) = c_n\rho^nP_n(\cos\theta)$$

Usando o princípio da superposição, encontramos mais geralmente as soluções

$$u(\rho,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\rho^nP_n(\cos\theta)$$

cujos coeficientes c_n poderiam ser calibrados se tivéssemos condições de contorno adequadas.

EXEMPLO 127. *Se a superfície ∂S de uma esfera S de centro na origem e raio 1 tem temperatura dada por $4z^3$, a sua temperatura de estado estacionário deve satisfazer:*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ em } intS \\ u = 4z^3 \text{ em } \partial S \end{cases}$$

Em coordenadas esféricas, a segunda equação se traduz como

$$u(1,\theta,\phi) = 4\cos^3\phi$$

Como a condição de contorno não depende de θ, é razoável procurar soluções que não dependam de θ, recaindo no exemplo anterior:

$$u(\rho,\theta,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \rho^n P_n(\cos\phi)$$

Para valer a condição de contorno, queremos

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(\cos\phi) = 4\cos^3\phi$$

ou seja, queremos que $\sum c_n P_n(x) = 4x^3$. Mas sabemos escrever o polinômio x^3 em função dos polinômios de Legendre (vide exercício abaixo):

$$x^3 = \frac{3}{5}P_1(x) + \frac{2}{5}P_3(x)$$

Assim, a temperatura de estado estacionário desejada é

$$u(\rho,\theta,\phi) = \frac{12}{5}\rho P_1(\cos\phi) + \frac{8}{5}\rho^3 P_3(\cos\phi) = \frac{12}{5}\rho\cos\phi + \frac{4}{5}\rho^3\left(5\cos^3\phi - 3\cos\phi\right)$$

ou, em coordenadas cartesianas

$$u(x,y,z) = \frac{12}{5}z\left(1 - x^2 - y^2 - z^2\right) + 4z^3$$

Note que $\Delta u = 0$, e que $u = 4z^3$ na borda da esfera, como desejado!

15.5. Exercícios

1) a) Use a EDO de Legendre para mostrar que

$$\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)P_n'(x)\right) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

b) Multiplicando esta equação por $P_m(x)$, tem-se

$$P_m\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)P_n'\right) + n(n+1)P_nP_m = 0$$

Analogamente

$$P_n\frac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)P_m'\right) + m(m+1)P_mP_n = 0$$

Subtraia estas equações e integre de -1 a 1 para mostrar a relação de ortogonalidade entre P_m e P_n.

2) Suponha que $f(x)$ é par. O que se pode dizer sobre os coeficientes c_n de sua série de Fourier-Legendre? E se f for ímpar? Explique.

3) a) Considere os $N+1$ polinômios $P_0(x)$, $P_1(x)$, ..., $P_N(x)$. Use a relação de ortogonalidade para mostrar que eles são linearmente independentes. [Dica: suponha $\sum_{k=0}^{N} a_k P_k(x) = 0$ e faça o produto interno de ambos os lados com $P_j(x)$. Conclua que $a_0 = a_1 = ... = a_N = 0$.]
b) Explique porque todo polinômio $q(x)$ de grau N pode ser escrito como uma combinação linear **finita** de polinômios de Legendre de grau até N.
c) Escreva os polinômios $3x^2$ e x^3 como combinação linear de $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ e $P_3(x)$.
Resposta: $3x^2 = 2P_2(x) + P_0(x)$; $x^3 = \frac{3}{5}P_1(x) + \frac{2}{5}P_3(x)$.

4) Demonstre as proposições 120 e 121.

5) a) Defina

$$A_n = \int_{-1}^{1} x^n P_n(x)\,dx$$

Integre por partes para escrever A_n em termos de A_{n-1}. Use esta recorrência para mostrar que

$$A_n = \frac{2^{n+1} \cdot (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

b) Note que

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n + q(x)$$

onde $q(x)$ tem grau $< n$. Use isto para mostrar que

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\, dx = \frac{1}{2^n} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \int_{-1}^{1} x^n P_n(x)\, dx$$

e enfim conclua que

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\, dx = \frac{2}{2n+1}$$

6) Mostre que

$$P_n(0) = \begin{cases} 0, \text{ se } n \text{ é ímpar} \\ \frac{(-1)^{n/2}}{2^n} \binom{n}{n/2}, \text{ se } n \text{ é par} \end{cases}$$

7) a) Encontre a série de Fourier-Legendre da função $f(x) = |x|$ (onde $-1 < x < 1$).
b) Suponha que você precisa escrever a função $g(x) = x$ (onde $0 \leq x < 1$) na forma

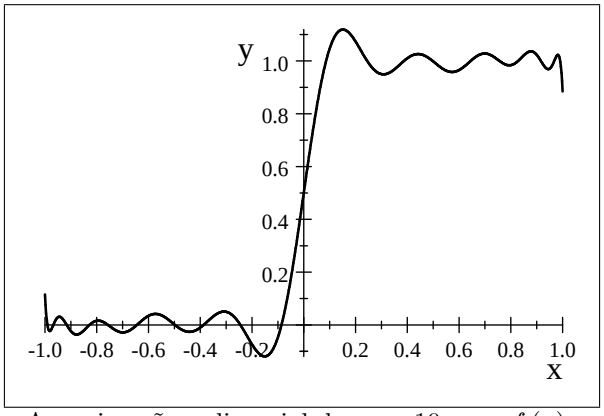
$$x = \sum_{k=0}^{\infty} A_k P_{2k}(x)$$

(apenas polinômios de Legendre de grau **par**!). Como você faria isso?

8) Obtenha a série de Fourier-Legendre da função $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } -1 \leq x < 0 \\ 1, \text{ se } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$.

Resposta:

$$f(x) \sim \frac{1}{2} P_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+1}} \frac{4k+3}{2k+2} \binom{2k}{k} P_{2k+1}(x)$$



Aproximação polinomial de grau 19 para $f(x)$.

9) A função $u = u(\rho, \phi)$ não depende de θ e satisfaz

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \text{ se } 0 \leq \rho < 1 \text{ e } 0 < \phi < \frac{\pi}{2} \\ u\left(\rho, \frac{\pi}{2}\right) &= 0 \text{ se } 0 \leq \rho < 1 \\ u(1, \phi) &= f(\phi) \text{ se } 0 < \phi < \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Interprete fisicamente este problema e determine u.